



TITLE:

Generalized Induced Transformationとその応用 (作用素環の研究とその応用)

AUTHOR(S):

伊藤, 雄二

CITATION:

伊藤, 雄二. Generalized Induced Transformationとその応用 (作用素環の研究とその応用). 数理解析研究所講究録 1977, 314: 36-48

ISSUE DATE:

1977-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103937>

RIGHT:

Generalized Induced Transformation と

その応用

立教大理学部 伊藤雄二

§0 序論. σ -finite な測度空間 (X, \mathcal{B}, m) 上の recurrent な変換 T から, X の subset A 上に, first return time に依って定義される induced transformation T_A は, 1940 年代に S. Kakutani [3] に依って導入されて以来, エルゴード理論の研究に基本的な役割を果たして来たが, T に不変測度が存在すると, T_A も必ず不変測度を持つので, 不変測度を持たない変換のクラスを不変測度を持つ変換のクラスと関係づける手段としては, 用いられる事が出来なかった。そこで, [2] で, Hajiam - Ito - Kakutani は, 在来の induced transformation を特別の場合として含む様を, 変換の pair に依る (generalized) induced transformation の idea を導入し, 不変測度を持たぬ ergodic な変換のあるクラス (所謂 E_{Π_λ} -型 ($0 < \lambda \leq 1$) の変換) は, dissipative な変換 S と, σ -finite な不変測度を持つ ergodic な変換 T の pair から, S の

section A 上に、(generalized の意味で) induce される事を示した。此の講演では、pair に依る induced transformation の定義と、 $\mathcal{E}_{\text{III}, \lambda}$ -型 ($0 < \lambda \leq 1$) の変換が与えられた時、その変換を induce する様な pair (T, S) の構成法を紹介し、更に、基として用いられる section の概念が A. Connes [1] や W. Krieger [4] に依って得られた幾つかの結果を、直観的に解り易い (エルゴード理論の立場から見て) 形に捉えるのに有効な役割を果たす事を示す。

§1 定義と準備. (X, \mathcal{B}, m) を σ -finite な Lebesgue 空間とし、 $\mathcal{G}(X)$ で X 上に定義された bi-measurable, non-singular な変換の全体の成す群を表わす。 $T \in \mathcal{G}(X)$ と $x \in X$ に対して、 $\text{Orb}_T(x) = \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と定義し、 $[T] = \{V \in \mathcal{G}(X) \mid \text{Orb}_V(x) \subset \text{Orb}_T(x), \forall x \in X\}$ とすると、 $[T]$ は $\mathcal{G}(X)$ の部分群であって、 T の full group と呼ばれる。 $S \in \mathcal{G}(X)$ に対して、 X の部分集合 A が、 S -section であるとは、すべての $x \in X$ に対して、 $\text{Orb}_S(x) \cap A$ が一点のみから成る様な集合である事を云う。 $\mathcal{G}(X)$ の部分集合 \mathcal{J} が ergodic であるとは、可測集合 A に対して、 $T(A) = A$ がすべての $T \in \mathcal{J}$ に対して成立するならば、 $m(A) = 0$ か $m(X - A) = 0$ が成り立つ事と定義し、 $T \in \mathcal{G}(X)$ が ergodic とは、 $\{T\}$ が ergodic になる事を云

う。変換 $S \in \mathcal{G}(X)$ が dissipative であるとは、可測集合 A が存在して、 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(A)$ (disj.) と表す事である。この様な集合 A を S -wandering set と呼ぶ。 $P \in \mathcal{G}(X)$ が periodic であるとは、各点 $x \in X$ に対して、 $n(x) \in \mathbb{N}$ が存在して、 $P^{n(x)}(x) = x$ が成り立つ事である。以下、 $\mathcal{G}(X)$ の sub-class を次の様に表す。

$$\mathcal{S}(X) = \{ T \in \mathcal{G}(X) \mid \text{可測な } T\text{-section が存在する} \}$$

$$\mathcal{P}(X) = \{ T \in \mathcal{G}(X) \mid T \text{ は periodic} \}$$

$$\mathcal{D}(X) = \{ T \in \mathcal{G}(X) \mid T \text{ は dissipative} \}$$

$$\mathcal{E}(X) = \{ T \in \mathcal{G}(X) \mid T \text{ は ergodic} \}$$

$\mathcal{E}(X) \cap \mathcal{S}(X) = \emptyset$, $\mathcal{S}(X) \supset \mathcal{D}(X) \cup \mathcal{P}(X)$ であり、又、任意の $S \in \mathcal{S}(X)$ に対して、 X の分割 $X = X_1 \cup X_2$ が存在して、

$$S(X_1) = X_1, \quad S(X_2) = X_2 \quad \text{且、} \quad S|_{X_1} \in \mathcal{D}(X_1), \quad S|_{X_2} \in \mathcal{P}(X_2) \quad \text{と表す}$$

事が容易に示される。 $\mathcal{E}(X)$ は更に三つの sub-class に区分される。即ち $\mathcal{E}_{II_1}(X) = \{ T \in \mathcal{E}(X) \mid m \text{ と同値な有限測度 } \mu \text{ が } T \text{ に因りて } T\text{-不変なものが存在する} \}$, $\mathcal{E}_{II_\infty}(X) = \{ T \in \mathcal{E}(X) \mid m \text{ と同値な } \sigma\text{-finite, infinite 測度 } \mu \text{ が } T\text{-不変なものが存在する} \}$, $\mathcal{E}_{III}(X) = \{ T \in \mathcal{E}(X) \mid m \text{ と同値な } \sigma\text{-finite 測度 } \mu \text{ が } T\text{-不変なものは存在しない} \}$ と定義すれば、 $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_{II_1}(X) \cup \mathcal{E}_{II_\infty}(X) \cup \mathcal{E}_{III}(X)$ (disj.) である。

変換 $T \in \mathcal{G}(X)$ と、 m と同値な測度 μ に対して、 μT は

$(\mu T)(A) = \mu(TA), \forall A \in \mathcal{B}$ で定義される測度を表わし. 同値な測度 μ と ν に対して, $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ は, ν の μ に関する Radon-Nikodym derivative を表わす. 変換 $T \in \mathcal{G}(X)$, μ と同値な測度 μ , 正数 α に対して, $A_\alpha = \{x \in X \mid \frac{d\mu T}{d\mu}(x) = \alpha\}$, 更に, $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \mu(A_\alpha) > 0\}$ と定義した時, $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ (disj.) となり, $\{V \in [T] \mid \mu V = \mu\}$ が ergodic になるならば,

T は測度 μ を contain すると言う. T が μ を contain する時 Λ が generate する \mathbb{R}^+ の multiplicative subgroup を $\Delta(\mu)$ で表わすと, $\Delta(\mu) = \{1\}$ か, ある λ ($0 < \lambda < 1$) に対して $= \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ か, 或いは, \mathbb{R}^+ の countable dense subgroup になるかのいずれかである. $\Delta(\mu) = \{1\} \iff T \in \mathcal{E}_{II_1}(X) \cup \mathcal{E}_{II_\infty}(X)$ であり, $\Delta(\mu) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であれば, T が contain する任意の測度 ν に対して, $\Delta(\nu) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つ. この時変換 T は sub-class $\mathcal{E}_{III_\lambda}(X)$ に属すると言う.

又, $\Delta(\mu)$ が \mathbb{R}^+ の dense subgroup であれば, T が contain する任意の測度 ν に対して, $\Delta(\nu)$ も dense subgroup である. この時 T は sub-class $\mathcal{E}_{III_1}(X)$ に属すると言う. contain する測度を持たない様な $\mathcal{E}_{III}(X)$ の変換の全体を $\mathcal{E}_{III_0}(X)$ で表わすと,

$$\mathcal{E}_{III}(X) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \mathcal{E}_{III_\lambda}(X) \text{ (disj.) とする. Class } \mathcal{E}(X) \text{ の以上の分類は,}$$

group measure space construction を通して, W^* -代数の factor の $II_1, II_\infty, III_\lambda$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 型への分類に対応する.

§2 pair に依る induced transformation. この節以降、可測集合のみを考察するのて、一々断らな。 $S \in \mathcal{L}(X)$ に対して、 A が S -section であるとする、full group $[S]$ の任意元 S' に対して、 $S'(A)$ は、 S -section であり、又、逆に、任意の S -section B に対して、 $[S]$ の元 S' が存在して、 $B = S'(A)$ とする。しかも、 $S'' \in [S]$ に対して $S''(A) = B$ であるならば、 $S'(x) = S''(x)$, $\forall x \in A$ が成り立つ。今、 $T \in \mathcal{G}(X)$, $S \in \mathcal{L}(X)$, S -section A に対して、 $T^{-1}(A)$ が S -section であるとする。 $S'(A) = T^{-1}(A)$ とする $[S]$ の元 S' を用いて、測度空間 $(A, B \cap A, m_A)$ 上に変換 R を

$$(*) \quad R(x) = TS'(x), \quad x \in A$$

と定義すると、 $R \in \mathcal{G}(A)$ である事が確かめられる。(*) に依って定義された変換を、pair (T, S) に依って、 S -section A 上に induce された変換と呼ぶ。

$T \in \mathcal{G}(X)$, $A \in m(A) > 0$ な subset とする時、 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $A_n = \{x \in A \mid T^n(x) \in A, T^j(x) \notin A \quad 1 \leq j < n\}$ と定義すると、 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j(A_n)$ (disj.) とする。今

$$P(x) = \begin{cases} T(x), & x \in T^j(A_n) \quad 0 \leq j \leq n-1, n \geq 2 \text{ の時} \\ T^{-(n-1)}(x), & x \in T^{n-1}(A_n), n \in \mathbb{N} \text{ の時} \end{cases}$$

と定義すると、 $P \in \mathcal{P}(X)$ であり、 A は P -section, $T^{-1}(A)$ も P -section とするから、pair (T, P) に依って、 P -section

A 上に変換 R が、induce されるが、この R は、first return time に依って、 T から A 上に induced された変換 T_A に他ならない。

次に $\mathcal{S}(X)$ の変換 S が、class $\mathcal{S}(X)$ に属する場合を考える。
 この時、一つの S -section A を固定すると、 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n(A)$ (disj.) と表わされるから、 δ_1 で空間 $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ 上に $\delta_1(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ で定義された測度を表わせば、測度空間 (X, \mathcal{B}, m) は、直積空間 $(A \otimes \mathbb{Z}, \mathcal{B}_A \otimes 2^{\mathbb{Z}}, m_A \otimes \delta_1)$ と同一視出来、変換 S は、 A 上の恒等写像と、 \mathbb{Z} 上の shift $n \rightarrow n+1$ の直積、即ち $(a, n) \rightarrow (a, n+1)$, $\forall (a, n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ 、と考えると差支えない。
 変換 $T \in \mathcal{G}(X)$ が、上の S -section A に対して、 $T^{-1}(A)$ も S -section になると言う条件は、例えば、 $T[S] = [S]T$, 即ち T が、sub-group $[S]$ の normalizer である、満たされる。
 $T[S] = [S]T$ と言う条件は、又、「 T がすべての $x \in X$ に対して、 $\text{Orb}_S(x)$ を $\text{Orb}_S(Tx)$ の上に写す」と言う条件と同値である。
 この時、任意の S -section B に対して、 $T^k(B)$ が、 S -section と存在事が、容易に示される。上の条件を満たす T に対して、pair (T, S) が、 A 上に induce する変換を R とすれば、 T と R の関係は、直積空間 $A \otimes \mathbb{Z}$ 上で次の様に表わされる事が解る。
 $(a, n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ に対して、 $T(a, n) = (R(a), \theta(a, n))$ 。
 此処で $\theta(a, n)$ は $A \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ の可測変換であって、 θ

し T と S が可換であれば、ある $A \rightarrow \mathbb{Z}$ の可測変換 θ_0 が存在して、 $\theta(a, n) = \theta_0(a) + n$, $\forall (a, n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ とする。

さて、 $S \in \mathcal{Q}(X)$, A を S -section とした時、 $\mathcal{Q}(A)$ に属する任意の R に対して、pair (T, S) が R を induce する様を、 $T \in \mathcal{Q}(X)$ は、 \tilde{R} を induce する。即ち、 $X = A \otimes \mathbb{Z}$ とし、

$S(a, n) = (a, n+1)$ と考え、与えられた $R \in \mathcal{Q}(A)$ に対して $\tilde{R} \in \mathcal{Q}(X)$ を $\tilde{R}(a, n) = (R(a), n)$, $\forall (a, n) \in A \otimes \mathbb{Z}$ と定義し

て、 $\mathcal{I}_R = \tilde{R}[S] = \{\tilde{R}S' \mid S' \in [S]\}$ とすれば、 \mathcal{I}_R に属する任意の T は $[S]$ の normalizer であり、pair (T, S) は A 上に R を induce する。又、逆に、上に述べた R と T の関係式から、pair (T, S) が A 上に R を induce する様を T はすべて、 \mathcal{I}_R の元である事も容易に解る。 R の性質と Class \mathcal{I}_R の性質は、次の様に結びついている。

Proposition. i) R が ergodic になる為の必要充分条件は、 \mathcal{I}_R が ergodic である事である。

ii) R に m_A と同値な σ -finite, 不変測度が存在する為の必要充分条件は、 $m_A \otimes \delta_1$ に同値な σ -finite な測度で、 \mathcal{I}_R の各元に対して不変なものがある事である。

証明は [2] 参照。

上の ii) の条件は、「 $m_A \otimes \delta_1$ に同値な σ -finite な測度で、 S と \tilde{R} に共通の不変測度が存在する」という条件とも同値であ

る。変換 S の任意の不変測度は、 A 上のある σ -finite な測度と δ_1 の直積の形をしてゐる事が容易に解るから $\mathcal{E}_{\text{II}}(X)$ に属する変換 T で、 $[S]$ の normalizer であり、且、 T の不変測度が、その様な形をしてゐるものが、存在すれば、pair (T, S) は A 上に $\mathcal{E}_{\text{III}}(A)$ に属する変換 R を induce する事になる。pair に依る induced transformation の方法で \mathcal{E}_{II} に属する変換と \mathcal{E}_{III} に属する変換が結びつけられるかと言う問題は、 $\mathcal{E}_{\text{III}}(A)$ に属する変換 R に対応する class \mathcal{I}_R の中に $\mathcal{E}_{\text{II}}(X)$ に属する変換が入っているかと言う問題に置き換へられる。これに關して次の結果が成り立つ。

Theorem. $S \in \mathcal{G}(X)$, A を S -section とすると、 $0 < \lambda \leq 1$ の時、任意の $R \in \mathcal{E}_{\text{III}_\lambda}(A)$ に対応する class \mathcal{I}_R は、 $\mathcal{E}_{\text{II}_\infty}(X)$ に属する変換 T を含む。逆に、 $R \in \mathcal{E}_{\text{III}}(A)$ に対して、 $\mathcal{I}_R \cap \mathcal{E}_{\text{II}_\infty}(X) \neq \emptyset$ であれば、 R は m に同値な測度 μ を contain し、従つて、ある λ ($0 < \lambda \leq 1$) に対して、 $R \in \mathcal{E}_{\text{III}_\lambda}(A)$ となる。

証明の概略 まず、 $\mathcal{I}_R \cap \mathcal{E}_{\text{II}_\infty}(X) \neq \emptyset$ であれば、 R はある測度 μ を contain する事を示そう。 $T \in \mathcal{I}_R \cap \mathcal{E}_{\text{II}_\infty}(X)$, $\nu \in m_A \otimes \delta_1$ と同値な X 上の T -不変測度とする。 $\nu(A) > 0$ であるから、 T の first return time に依つて A 上に induce される変換 T_A は、測度 $\nu|_A$ を不変にする ergodic な変換であり、 T と R の関係から、 $T_A \in [R]$ となる事も明らかである。従つ

7. m と同値な測度 $\nu|_A$ に対して, $\{V \in [R] \mid \nu|_A V = \nu|_A\}$ は ergodic になる。 R が $\nu|_A$ を contain するかどうかは解さな
いか。 Krieger の結果 [5] を使えば, この様な測度 $\nu|_A$ が存在
すれば, R は他の測度 μ を contain し, 従って, $R \in \mathcal{E}_{\Pi_\lambda}(A)$
($0 < \lambda \leq 1$) となる事が示される。

次に, $R \in \mathcal{E}_{\Pi_\lambda}(A)$ ($0 < \lambda \leq 1$) の時, $\mathcal{I}_R \cap \mathcal{E}_{\Pi_\infty}(X)$ に属する T
が存在する事を示す。 簡単の爲に, $0 < \lambda < 1$ の場合を考えよ
う。 R は m_A と同値な測度 μ を contain し, $\Delta(\mu) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
であるが, 殆どすべての $x \in A$ に対して, $\left\{ \frac{d\mu R^k}{d\mu}(x) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
 $= \Delta(\mu)$ が成立する事が解る。 今, $(\mathbb{Z}, 2^\mathbb{Z})$ 上の測度 δ_λ を
 $\delta_\lambda(n) = \lambda^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ で定義し, $(X, \mathcal{B}) = (A \otimes \mathbb{Z}, \mathcal{B}_A \otimes 2^\mathbb{Z})$
上の測度 $\tilde{\mu} = \mu \otimes \delta_\lambda$ を考えると, $\tilde{\mu}$ は, 明らかに, 測度
 $m_A \otimes \delta_1$ と同値である。 そこで, X 上の変換 T を

$$T(a) = T(a, n) = (R(a), n + \log_\lambda \frac{d\mu R}{d\mu}(a))$$

と定義すると, $T \in \mathcal{G}(X)$, $TS = ST$ は明らかで, 又, T
は測度 $\tilde{\mu}$ を不変にする事も確かめられる。 又, R が μ を
contain する事から, T の first return time に依る, A 上
への induced transformation T_A が ergodic になる事が解り,
更に, この事と, $\left\{ \frac{d\mu R^k}{d\mu}(a) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \Delta(\mu)$ が, 殆どすべての
 $a \in A$ に対して成り立つ事を併せると, T が ergodic, 従
って, $T \in \mathcal{E}_{\Pi_\infty}(X) \cap \mathcal{I}_R$ となる事が結論される。 $R \in \mathcal{E}_{\Pi_\lambda}(A)$ の場

合も、殆ど同様(詳細は[2]参照)にして、 $T \in \mathcal{E}_{\Pi_0}(X) \cap \mathcal{J}_R$ が構成出来るが、但し、この場合、 T は $[S]$ の normalizer にはなるが、 S と可換になる様には作れない。

註 (1) $R \in \mathcal{E}_{\Pi}(A)$ であれば、 $\mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\Pi_1}(X)$ は常に空集合である。(2) $R \in \mathcal{E}_{\Pi_1}(A) \cup \mathcal{E}_{\Pi_0}(A)$ に対しても、上の構成法と略同じ様にして、 $T \in \mathcal{J}_R \cap \mathcal{E}_{\Pi_0}(X)$ が存在する事を示す事が出来る。又、 $R \in \mathcal{E}_{\Pi_0}(A)$ に対しては、 \mathcal{J}_R は $\mathcal{E}_{\Pi}(X)$ の元を含み得ないが、 σ -finite な不変測度を持ち、aperiodic, recurrent であり、 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n A = X$ となる様な T を必ず含んで居る事が示される。

§3 応用. (1) $R \in \mathcal{E}_{\Pi_\lambda}(A)$ ($0 < \lambda < 1$) とし、 μ を R に依って contain される測度とする。上の Theorem で構成された T を用いて、 R に contain される測度の全体を次の様に特徴づける事が出来る。即ち、 $\mathcal{M}_R = \{(A, B_A) \text{ 上の測度 } \nu \mid \nu \text{ は } m_A \text{ と同値、且、変換 } R \text{ は } \nu \text{ を contain する}\}$ と定義すると、 \mathcal{M}_R の元は、 X 上の T -不変測度 $\tilde{\mu} = \mu \otimes \delta_\lambda$ の S -section への制限と、一対一に対応する。実際、 B を S -section とすると、 T の first return time に依る B 上への induced transformation T_B は ergodic であり、 $\tilde{\mu}|_B$ を不変にするが、 $S' \in [S]$ であり $S'(A) = B$ となる変換を用いて、 $\nu = \tilde{\mu}|_{S'}|_B$, $V = S'^{-1} T_B S'$ と定義すると、 $V \in [R]$, V ergodic $\nu V = \nu$ となるので、 $\nu \in \mathcal{M}_R$ が示される。一方、 $\nu \in \mathcal{M}_R$ と

とすると、或る正数 C が存在して、 $\frac{d\nu}{d\mu}(x) = C\lambda^{n(x)}$ と表わされる事が示されるから、 $A_k = \{x \in A \mid n(x) = k\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$S'(a, n) = S^{-k}(a, n) = (a, n-k), \quad a \in A_k, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{と}$$

定義すれば、 $S' \in [S]$ となる。 $B = S'(A)$ は S -section

になり、測度 ν は $C\tilde{\mu}|_B$ S' と一致し、induced transformation

T_B に対し、変換 $V = S'^{-1}T_B S'$ が ν を不変にする

ergodic な $[R]$ に属する変換となる事も示される。

$R \in \mathcal{E}_{III, \lambda}(A)$ の時にも、 X 上の T -不変測度 $\tilde{\mu}$ の S -section への制限は、上と同様にして、 \mathcal{M}_R のある元に対応する事が示されるが、しかし、この場合、 \mathcal{M}_R は本質的にその様にして捉えられるものとは違った元も含んでいる。

(2) Theorem に依って得られた T と S -section の概念を用いる事に依って、次の結果 (Connes の定理の特殊な場合) を導く事も可能である。

Theorem (Connes): $R \in \mathcal{E}_{III, \lambda}(A)$ ($0 < \lambda < 1$) とすると、次の性質を持つ変換 R_1, R_2 が $[R]$ に存在する。

i) $R_1 \in \mathcal{E}_{II_\infty}(A)$

ii) R_2 は $[R_1]$ の normalizer である。

iii) R_1 の不変測度 ν に対し、 $\nu R_2 = \lambda \nu$ が成り立つ。

iv) $[R] = [R_1, R_2]$ 。

証明の概略: T を §2 の Theorem の証明で構成され

た $\mathcal{I}_R \cap \mathcal{E}_{\mathbb{I}_\infty}(X)$ の元, $\tilde{\mu} = \mu \otimes \delta_\lambda$ を T -不変測度とする。
 T は変換 S と可換に写っている。 $[S]$ の元 S' を適当に取ると
 $B = S'(A)$ は $\tilde{\mu}(B) = \infty$ とする S -section を与え, $C = S(B)$
 $= SS'(A)$ も又, $\tilde{\mu}(C) = \infty$ とする S -section である。 T の
 first return time に依る B 上の induced transformation T_B に
 対して, $R_1 = S'^{-1} T_B S'$ は $[R]$ に属する A 上の変換で, A
 上の σ -finite, infinite な測度 $\gamma = \tilde{\mu}|_B$ を不変にするから,
 $\mathcal{E}_{\mathbb{I}_\infty}(A)$ に属する。 T の C 上の induced transformation T_C に
 対して, $(SS')^{-1} T_C (SS')$ はやはり $[R]$ に属する変換に属するが,
 T と S とが可換な事から, この変換は R_1 に一致する事が解る。
 一方, $\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(C) = \infty$ であるから, T は compatible な変換
 $U: B \rightarrow C$ が存在するが, T と S が可換な事を用いて, U
 の U を $[T]$ の元 T' として拡張し, 任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して,
 $T'^j(B) = S^j(B)$ が成り立つ様になる。 この T' は, 又,
 $[R]$ の元 R_2 と natural に対応する。 この R_2 に対して,
 R_1 の不変測度 γ は, $\gamma R_2 = \lambda \gamma$ の性質を持つ事が,
 $\frac{d\tilde{\mu} S}{d\tilde{\mu}}(x) = \lambda^{-1}$, $\forall x \in X$ が成り立つ事を用いて, 証明出来
 る。 又, T_B と T_C が共に R_1 に対応する事から, $R_2[R_1] = [R_1]R_2$
 が成り立つ事。 又, $T'^j(B) = S^j(B)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ から,
 $[R] = [R_1, R_2]$ とする事が結論される。

References

- [1] Connes, A., Une classification des facteur de type III , Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e serie, 6 (1973), 133-252.
- [2] Hajian, A., Ito, Y., Kakutani, S., Orbits, sections and induced transformations, Israel J. of Math. 18 (1974), 97-115.
- [3] Kakutani, S., Induced measure preserving transformations, Proc. Japan Acad. 19 (1943), 635-641.
- [4] Krieger, W., On non-singular transformations of a measure space I, II., Z. Wahrsch. u. verw. Geb. 11 (1969), 83-97, 98-119.
- [5] Krieger, W., On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space, Lecture Notes in Mathematics #160, Springer Verlag, 1970, 158-177.